

文章编号: 1000-8055(2012)08-1895-07

# 弧齿锥齿轮低敏感性修形

苏进展, 方宗德

(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

**摘 要:** 为了改善航空弧齿锥齿轮的啮合稳定性, 提出了齿面低敏感性修形. 基于齿面误差和误差敏感性矩阵, 建立齿面误差修正模型, 用广义逆矩阵的最小二乘法求解超越方程组, 获得机床调整参数的修正量; 对齿面进行 3 段抛物线修形, 将修形后的齿面作为目标齿面, 采用齿面误差修正的方法求得相应的机床调整参数; 仿真算例表明: 经过低敏感性修形, 降低了齿面印痕的误差敏感性, 提高了齿轮副的容差范围, 但齿根弯曲强度下降了 4.28%. 因此, 通过合理选择齿面修形系数, 可降低齿根强度的变化, 改善齿轮副啮合稳定性.

**关 键 词:** 弧齿锥齿轮; 啮合稳定性; 误差敏感性; 齿面修形; 齿轮强度

**中图分类号:** V261.2<sup>+</sup>7; TH132

**文献标志码:** A

## Low sensitivity modification for spiral bevel gears

SU Jin-zhan, FANG Zong-de

(School of Mechanical Engineering,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The methodology of low sensitivity modification was proposed for improving the meshing stability of spiral bevel gears used in aerospace application. Based on tooth surface error and error sensitivity matrix, the model of tooth surface error modified can be developed, the generalized inverse matrix with least square method was adopted to solve the transcendental equations, and the correction quantities can be obtained. Tooth surface modification with three segments parabolic was conducted, and the tooth surface correction model and the relative solutions were applied to obtain correspondingly machine-tool settings adjustment quantities by considering the modified tooth surface as the objective surface. A numerical example presents that the error sensitivity of the contact patterns and the misalignment tolerances can be enhanced by the low sensitivity modification with the root bending strength descending to 4.28%. Therefore, the change of tooth root strength can be fall down and the meshing stability can improved by the properly determination of tooth modification coefficients.

**Key words:** spiral bevel gears; meshing stability; error sensitivity;  
tooth surface modification; tooth strength

齿面修形是相对于共轭齿面刮去一层表面材料, 使得实际齿面相对于共轭齿面产生一定量的偏差. 齿面误差修正是在齿轮检测的基础上, 采用

修正算法来减小齿面误差, 其本质是实际齿面向理论齿面逐步逼近.

20 世纪 90 年代 Gleason 公司研究了基于坐

收稿日期: 2011-09-20

网络出版地址: [http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120830.1200.201208.1895\\_031.html](http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20120830.1200.201208.1895_031.html)

基金项目: 国家自然科学基金(51175423)

作者简介: 苏进展(1982—), 男, 福建泉州人, 博士后, 主要从事齿轮传动设计与分析.

标测量的齿面误差修正技术,仅需要一次到两次的试切就能完成接触区的修正工作,但是该技术作为 Gleason 公司核心技术从不对外公开<sup>[1]</sup>. Litvin 教授等提出了齿面误差补偿的函数法,但由于机床调整参数对齿面几何机构的耦合影响,此方程组的求解困难,容易出现病态<sup>[2-4]</sup>. Gosse-lin 等基于机床调整参数的单位增量,建立误差敏感矩阵,通过求解误差补偿方程获得机床调整参数的修正量<sup>[5]</sup>. 台湾学者 Lin 等提出了一种修正优化新方法,将机床调整参数的实际调整范围作为方程组的约束条件<sup>[6]</sup>. 方宗德等利用最小二乘法对弧齿锥齿轮加工误差识别,并对叠加随意性变形偏差后构成的综合偏差进行了当量加工误差识别<sup>[7]</sup>. 王军、王小椿等用差曲面描述理论齿面和实际齿面的偏差,可迅速稳定的求解出切齿机床参数的修正值,且需修正的机床参数最少<sup>[8-9]</sup>. Gleason 公司 Fan 博士等提出了用高阶万能运动修正端面铣齿的齿面高阶误差项<sup>[10-11]</sup>. 台湾学者 Shih 等提出了一种直接面向 6 轴数字控制机床(CNC)的齿面误差修正方法,通过运动轴的高阶控制可以简单地完成齿面高阶修正<sup>[12]</sup>.

本文在计算齿面误差和误差敏感性的基础上,提出了齿面误差修正模型,并采用相应的算法计算修正量;随后,研究具有低敏感性的齿面 3 段抛物线修形,并比较了齿面印痕的误差敏感性,容差范围和齿根强度.

## 1 齿面误差修正

### 1.1 齿面误差定义

齿面误差定义:在理论齿面法线上,实际齿面与理论齿面的偏离距离<sup>[13]</sup>. 图 1 所示为旋转投影面上的齿面网格点,  $M$  点为测量基准点.

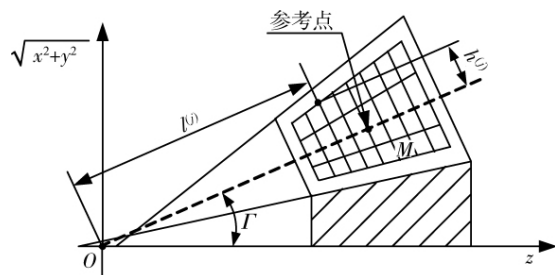


图 1 齿面的旋转投影面

Fig. 1 Rotary projection plane of tooth surface

实际齿面坐标  $(x'_i, y'_i, z'_i)$  与理论齿面坐标  $(x_i, y_i, z_i)$  在旋转投影面具有相同的位置参数,再结合齿面数学模型<sup>[14]</sup>,可求出对应点的理论齿

面坐标. 齿面误差表达式为

$$b_i = \sqrt{(x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2 + (z_i - z'_i)^2} \cos \gamma \quad (1)$$

式中  $\gamma$  为实际齿面到理论齿面的连线与理论齿面法线的夹角.  $b_i > 0$  表示实际齿面在理论齿面之上,  $b_i < 0$  表示实际齿面在理论齿面之下.

### 1.2 齿面误差修正

若实际齿面的误差仅由机床调整参数误差引起的,理论上可以通过修正机床调整参数来使偏差为 0. 实际的各种误差(包括机床随机误差、三坐标测量机误差等)的综合作用,使得这一目标无法实现,只能通过机床调整参数的修正实现偏差最小化.

理论齿面位置矢量和法向矢量表示为

$$\begin{cases} r_i = r_i(u, \theta, d_j) \\ n_i = n_i(u, \theta, d_j) \end{cases} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (2)$$

其中  $u, \theta$  表示曲面坐标;  $d_j = (1, 2, \dots, m)$  表示机床调整参数.

理论齿面误差的表达式为

$$\delta r_i \cdot n_i = \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial r_i}{\partial d_j} \cdot n_i \right) \delta d_j = \sum_{j=1}^m a_j \delta d_j \quad (3)$$

式中  $a_j = \partial r_i / \partial d_j \cdot n_i$  表示机床调整参数变化引起齿面点位置矢量在法向投影的变化,称之为敏感系数(第  $j$  个机床调整参数对该点误差的敏感系数). 由于齿面方程是隐式的,不能直接求导来计算敏感系数,可用差分代替导数,令一组新的机床调整参数为

$$\begin{cases} d_j^* = d_j & j \neq k \\ d_j^* = d_j + \delta d_j & j = k \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\delta d_j$  为第  $k$  个机床调整参数的单位增量. 代入式(2)求解得到该点的位置矢量  $r_i^*$ , 理论齿面的位置矢量  $r_i$  变为  $r_i^*$ , 其微分增量为  $\delta r_i$ ,  $n_i$  为理论齿面的单位法向矢量. 则敏感系数  $a_j$  为

$$a_j = \frac{\partial r_i}{\partial d_j} \cdot n_i = (r_i^* - r_i) \cdot n_i \quad (5)$$

令  $j$  从 1 变到  $m$ , 采用相同的方法可求出所有的机床调整参数改变对该点的误差敏感系数  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , 则相应测量网格上  $n$  个点  $m$  个机床调整参数的敏感系数就构成机床误差敏感矩阵  $S$ .

根据式(1)计算  $n$  个齿面网格点上的误差为

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T \quad (6)$$

则敏感矩阵  $S$ 、齿面误差向量  $b$  和机床调整参数向量  $\delta d$  之间的关系式为

$$S\delta d = b \quad (7)$$

式(7)有  $n$  个线性方程,有  $m$  个未知数,往往  $n \gg m$ , 这样的方程组为超静定线性方程组,一般无精确解,只能在各种规范的意义下求它的广义解. 方程(7)的最小二乘解可用矩阵  $S$  的广义逆表示

$$\delta d = S^+ b \quad (8)$$

$S$  的广义逆为

$$S^+ = V_r S_r^{-1} U_r^T \quad (9)$$

其中  $S_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ,  $U_r, V_r$  是相应的矩阵  $S$  的左右奇异向量矩阵.

## 2 齿面的低敏感性修形

### 2.1 齿面修形原理

图2为齿面低敏感性修形的示意图. 将工作齿面分成3部分:  $A, B$  和  $C$ , 其中  $B$  为齿面印痕区域,  $A$  和  $C$  分别靠近小端和大端. 在保证齿面连续可导的前提下, 沿着接触区宽度方向, 按照一定的方式去除接触区  $B$  以外的材料, 可降低齿面印痕对安装误差的敏感性; 沿着接触迹线方向修形, 可获各种传动误差曲线, 减小齿轮啮入啮出冲击.

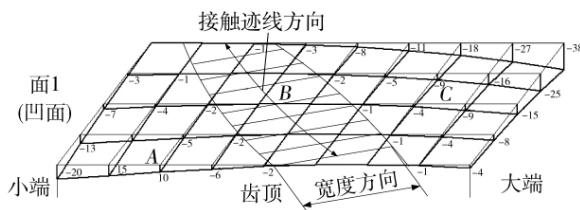


图2 接触区修形原理

Fig. 2 Crowning principle for contact area

如图3所示, 一系列刀痕组成了齿面,  $s_p^{(0)}, s_p^{(1)}, \dots, s_p^{(n)}$  对应着刀盘切削刃上的某一切削位置,  $\theta_p^{(s)}$  和  $\theta_p^{(e)}$  为该条接触线对应的刀盘开始转角和结束转角.

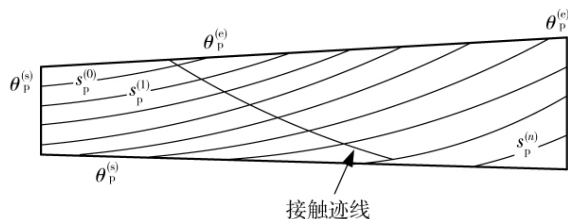


图3 刀具与齿面接触线

Fig. 3 Instantaneous contact lines of cutter and gear surfaces

图4为旋转投影面上齿面印痕示意图,  $C_0$  为

接触迹线,  $C_1, C_2$  分别为齿面印痕边界线,  $C_3$  为刀具与齿面的接触线;  $M_0$  为接触迹线  $C_0$  与接触线  $C_3$  的交点,  $M_1, M_2$  为接触线  $C_3$  与边界线  $C_1, C_2$  的交点;  $M_3, M_4$  为接触线  $C_3$  与工作齿面边界的交点,  $\eta$  为接触迹线的方向.

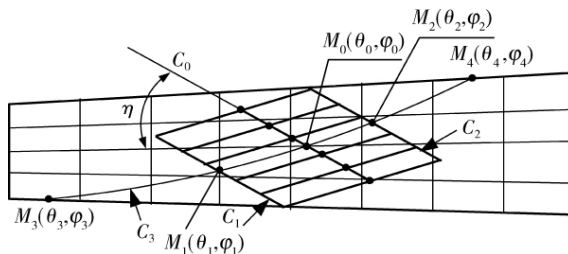


图4 齿面印痕

Fig. 4 Contact patterns of tooth surface

由于弧齿锥齿轮齿面结构非常复杂, 不能采用类似于圆柱齿轮简单的齿廓或齿向修形. 将齿面离散成45个网格点的法向修形量和原齿面叠加作为修形后的齿面, 即目标齿面. 采用上一节齿面误差修正方法获得相应修形齿面的机床调整参数. 由于工作齿面被分成3部分, 本文提出了3段抛物线修形对每个接触区采用不同修形. 最后, 将网格点处的修形量叠加到理论齿面上作为目标齿面. 图5所示,  $\theta$  为刀盘的加工转角,  $\theta_0$  为网格点对应接触线上的啮合点的加工转角,  $\delta$  为齿面网格点的法向修形量. 在  $\theta-\delta$  坐标系中, 3段抛物线方程的表达式为

$$\begin{cases} \delta_1 = a_1(\theta - \theta_0)^2 \\ \delta_2 = a_2(\theta - \theta_0)^2 + b_2(\theta - \theta_0) + c_2 \\ \delta_3 = a_3(\theta - \theta_0)^2 + b_3(\theta - \theta_0) + c_3 \end{cases} \quad (10)$$

式(10)中有7个未知数, 同时还应满足如下的约束条件: ①每段抛物线连接点处连续; ②连接点处光滑, 即一阶导数连续; ③给出每段抛物线最大修形量  $d_1, d_2, d_3$ .

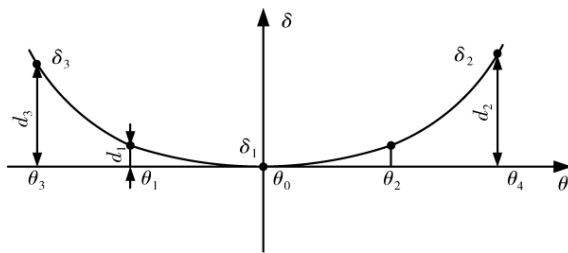


图5 3段抛物线修形

Fig. 5 Three-parabolic shaped modification

由上述3个约束条件可以得到

$$\delta_1(\theta_i) = d_1 \quad (11)$$

$$\begin{cases} \delta_1(\theta_2) = \delta_2(\theta_2) \\ \delta'_1(\theta_2) = \delta'_2(\theta_2) \\ \delta_2(\theta_2) = d_2 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \delta_1(\theta_1) = \delta_3(\theta_1) \\ \delta'_1(\theta_1) = \delta'_3(\theta_1) \\ \delta_3(\theta_3) = d_3 \end{cases} \quad (13)$$

式中  $\theta_i$  为  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的最大值。

## 2.2 齿面修形优化

图 6 为齿面优化流程图,主要计算齿面修形量  $b$  和机床调整参数敏感性系数矩阵  $S$ ,并用广义逆矩阵的最小二乘法求解,得到满足修形齿面的机床调整参数修正量  $\delta d$ 。具体的步骤为:

Step 1 由式(2)求得工作齿面上划分的 45 网格点的位置矢量  $r_i(\theta_i, \varphi_i)$  和法向矢量  $n_i(\theta_i, \varphi_i)$ ,并计算敏感性系数矩阵  $S$ 。

Step 2 从 TCA(tooth contact analysis)分析结果(包括齿面接触迹线和齿面印痕)确定接触区参数  $C_0, C_1, C_2, \eta$ ,且计算每个网格点相对应的  $M_1, M_2, M_3, M_4$ 。

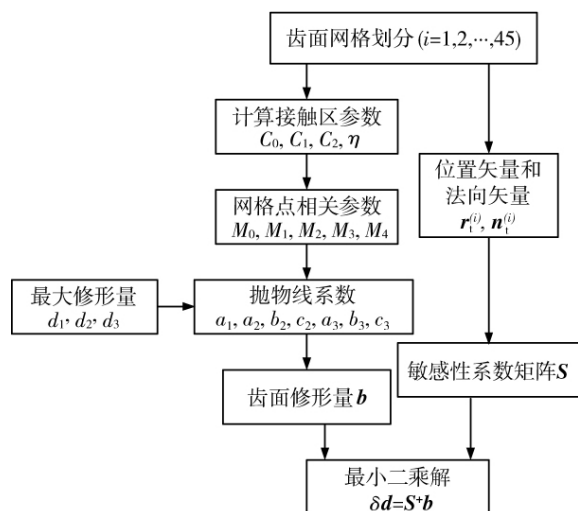


图 6 齿面修形优化流程

Fig. 6 Flow chart for crowing optimization of tooth surface

Setp 3 给定最大修形量  $d_1, d_2, d_3$  根据式(15)~式(17)计算 3 段抛物线修形系数  $a_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ ,齿面网格点的修形量为

$$b^{(i)} = \begin{cases} a_1(\theta - \theta_0)^2 & \theta_1 \leq \theta_i \leq \theta_2 \\ a_2(\theta - \theta_0)^2 + b_2(\theta - \theta_0) + c_2 & \theta_2 \leq \theta_i \leq \theta_4 \\ a_3(\theta - \theta_0)^2 + b_3(\theta - \theta_0) + c_3 & \theta_3 \leq \theta_i \leq \theta_1 \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 45) \quad (14)$$

Setp 4 由最小二乘法式(8)求得修正量  $\delta d$ ,最终确定机床调整参数为  $d = d + \delta d$ 。

## 3 算例

表 1 为弧齿锥齿轮副的基本参数。以小轮工作面(凹面)为例来验证上述方法;表 2 为小轮凹面的机床调整参数,人为给定一组机床调整参数的误差量,产生的齿面坐标作为实测齿面坐标,得到齿面误差如图 7 所示;图 8 为修正后的齿面误差图;表 3 为机床参数调整修正量,修正后齿面误差控制在较小的范围之内,验证齿面误差修正模型和方法的正确性。

表 1 齿轮副基本参数

Table 1 Blank data of gear

|           | 主动锥齿轮    | 从动锥齿轮    |
|-----------|----------|----------|
| 齿数        | 23       | 86       |
| 模数        | 4.25     |          |
| 法向压力角/(°) | 20       |          |
| 中点螺旋角/(°) | 25       |          |
| 螺旋方向      | 左        | 右        |
| 轴交角       | 51°9'7"  |          |
| 节锥角       | 10°6'48" | 41°2'20" |
| 顶锥角       | 10°57'3" | 41°24'   |
| 根锥角       | 9°45'7"  | 40°12'4" |
| 节圆直径/mm   | 97.75    | 365.50   |
| 外锥距/mm    | 278.341  |          |
| 中点锥距/mm   | 256.841  |          |
| 齿宽/mm     | 43       |          |
| 齿顶高/mm    | 4.89     | 2.11     |
| 齿根高/mm    | 2.91     | 5.69     |

表 2 小轮加工参数

Table 2 Machine-tool settings for pinion

| 参数       | 数值       | 参数        | 数值       |
|----------|----------|-----------|----------|
| 刀尖半径/mm  | 158.6791 | 轴向轮位/mm   | 9.9657   |
| 齿形角/(°)  | 18.0     | 床位/mm     | -2.8346  |
| 径向刀位/mm  | 242.7659 | 轮坯安装角/(°) | 9.75     |
| 角向刀位/(°) | 36.0365  | 二阶变异性系数 C | 0.103244 |
| 滚比       | 5.94859  | 三阶变异性系数 D | 0.075732 |
| 垂直轮位/mm  | -6.8573  |           |          |

表 3 机床参数调整量  
Table 3 Increments for machine settings

| 参数        | 误差修正    | 低敏感性修形  |
|-----------|---------|---------|
| 径向刀位/mm   | -0.0275 | 0.01207 |
| 角向刀位/(°)  | 0.0095  | 0.0065  |
| 滚比        | 0.00079 | 0.00548 |
| 垂直轮位/mm   | -0.1029 | -0.2491 |
| 轴向轮位/mm   | 0.0779  | -0.3017 |
| 床位/mm     | -0.0039 | 0.0022  |
| 轮坯安装角/(°) | 0.0887  | 0.00134 |

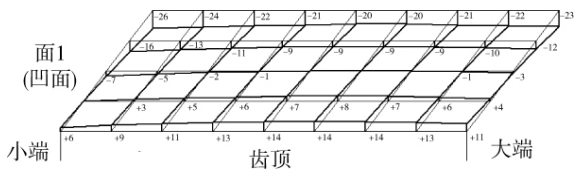


图 7 齿面误差(单位:μm)  
Fig. 7 Tooth surface errors (unit:μm)

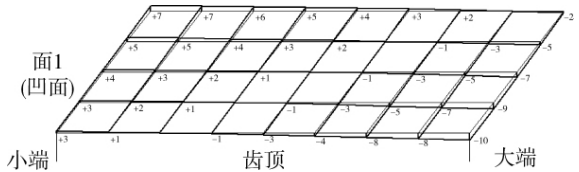


图 8 齿面误差修正(单位:μm)  
Fig. 8 Correction for tooth surface errors (unit:μm)

表 4 为齿面 3 段抛物线修形的参数值,图 9 为根据 3 段抛物线修形后得到的齿面误差图,图 10 为通过优化后得到的齿面误差图,齿面优化后机床调整参数的调整量列于表 3 第 3 列。

从图 9 可以看出:修形后的齿面保证了接触区基本不变,接触区两边的齿面有一定的修形量,修形后小轮凹面呈中凸,但这可能造成在加载时接触椭圆变短,引起齿根弯曲应力增大.图 10 为

表 4 修形参数  
Table 4 Coefficient for modification

| 参数        | 数值     | 参数    | 数值      |
|-----------|--------|-------|---------|
| $d_1$ /mm | 0      | $b_2$ | -0.0302 |
| $d_2$ /mm | -0.005 | $c_2$ | -0.0041 |
| $d_3$ /mm | -0.003 | $a_3$ | 0.1683  |
| $a_1$     | 0      | $b_3$ | -0.0182 |
| $a_2$     | 0.2805 | $c_3$ | -0.0025 |

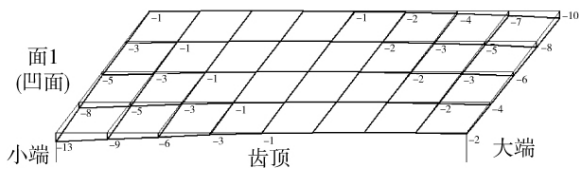


图 9 齿面修形(单位:μm)  
Fig. 9 Modification for tooth flank (unit:μm)

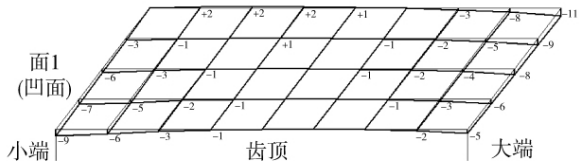


图 10 优化后齿面(单位:μm)  
Fig. 10 Tooth surface with optimization (unit:μm)

通过齿面误差修正方法得到齿面误差图,与图 9 较为接近但在个别网格存在一些差异。

表 5 为优化前后弧齿锥齿轮错位量的容差比较,表 5 为在大轮扭矩为 1034.78 N·m 下,修形优化前后大小轮应力的比较。

从表 5 中可以看出:除中心距错位量修形后的容差范围有所下降,其他 3 种类型误差修形后的容差限最大值和最小值均有所提高.但从表 6 可以看出修形后齿轮的应力值较修形前略有增加,增幅最大为小轮齿根最大弯曲应力,达 4.28%。

表 5 修形前后错位量的容差比较  
Table 5 Comparison of errors tolerance for before-and after-modification

| 参数         | 修形前容差  |         | 修形后容差  |         |
|------------|--------|---------|--------|---------|
|            | 最大值    | 最小值     | 最大值    | 最小值     |
| 大轮轴向错位量/mm | 0.4852 | -0.3644 | 0.5143 | -0.3816 |
| 小轮轴向错位量/mm | 0.4254 | -0.7121 | 0.4883 | -0.7512 |
| 中心距错位量/mm  | 0.8032 | -0.5486 | 0.7825 | -0.5220 |
| 轴交角错位量/(°) | 2.8647 | -2.3245 | 2.9243 | -2.5964 |

表 6 修形前后应力比较

Table 6 Comparison of various stresses for before- and after-modification

|    | 应力类型         | 修形前       | 修形后       | 增幅/% |
|----|--------------|-----------|-----------|------|
| 小轮 | 齿根最大弯曲应力/MPa | 68.5268   | 71.4625   | 4.28 |
| 大轮 | 齿根最大弯曲应力/MPa | 214.8149  | 223.4957  | 4.04 |
|    | 齿面最大接触应力/MPa | 1078.5681 | 1120.7463 | 3.91 |

随着载荷的增大,修形前后齿轮副的强度差距将逐渐减小.

结合 LTCA (loaded tooth contact analysis) 技术<sup>[15]</sup>分析加载条件下修形前后齿面印痕的敏感性.图 11 为在 100% 载荷条件下不考虑安装误差时修形前后的齿面印痕,经过敏感性优化齿面印痕面积较小,这可能会削弱齿轮副的强度性能(表 6),但降低了齿轮副对安装误差的敏感性.

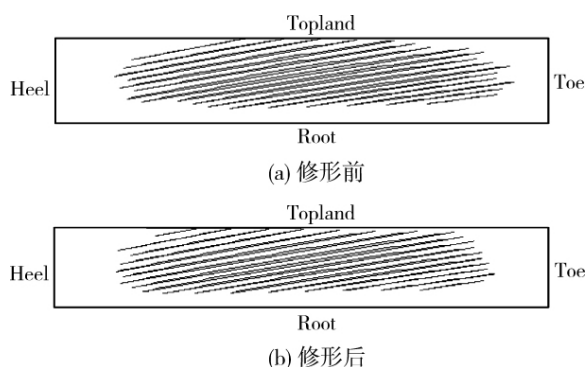


图 11 修形前后的齿面印痕

Fig. 11 Tooth contact patterns of before- and after-optimizations

任意给定一组安装误差:小轮轴向错位量  $H = -0.1 \text{ mm}$ ,大轮轴向错位量  $H_g = 0.1 \text{ mm}$ ,中心距错位量  $V = -0.2 \text{ mm}$ ,轴交角错位量  $\Sigma = 0.003 \text{ rad}$ ;在 100% 载荷条件下,修形前的齿面印痕为图 12(a),修形后的齿面印痕如图 12(b).

在无安装误差条件下齿面印痕参数<sup>[16]</sup>为  $[255.8728 \quad -0.6052 \quad 0.2128 \quad 212.7740]$ 在上述给定错位量时的印痕参数为  $[263.2545 \quad -0.6224 \quad 0.2419 \quad 203.6070]$ ,可以看出齿面印痕偏向大端,印痕面积也减小;修形后齿面印痕在无错位条件下的齿面印痕参数为  $[253.1256 \quad -0.6109 \quad 0.2239 \quad 185.8772]$ ,在上述给定错位量时的印痕参数为  $[256.5887 \quad -0.5526 \quad 0.2547 \quad 184.4478]$ ,齿面印痕面积有一定减小.

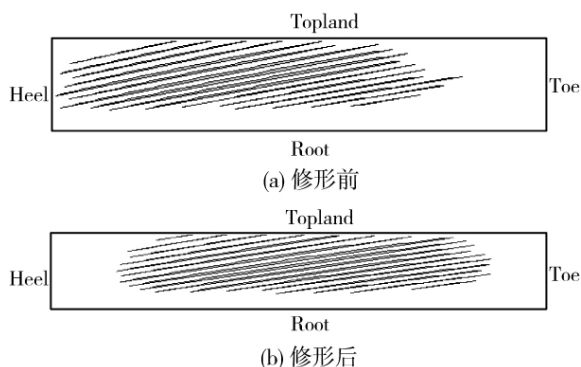


图 12 修形前后的齿面印痕(有误差)

Fig. 12 Tooth contact patterns of before- and after-optimizations (under misaligned errors)

## 4 结 论

1) 齿面 3 段抛物线修形降低齿面印痕对安装误差的敏感性,同时引起了加载时接触椭圆变短,产生弯曲应力小幅度增大.

2) 齿面修形优化提高了齿轮副的安装误差的容差范围和齿面印痕对安装误差的敏感性,表明该方法改善啮合稳定性.

3) 通过设计合理的齿面 3 段抛物线修形系数,可以兼顾齿轮强度性能和敏感性要求,获得最佳的设计方案.

## 参考文献:

- [1] 樊奇,让·德福. 格里森专家制造系统(GEMS)开创弧齿锥齿轮及准双曲面齿轮数字化制造新纪元[J]. 世界制造技术与装备市场, 2005(4): 87-93.  
FAN Qi, Dafoe R. Gleason expert manufacturing system (GEMS) opens a new era for digitized manufacturing of spiral bevel and hypoid gears[J]. World Manufacturing Engineering & Market, 2005(4): 86-93. (in Chinese)
- [2] Litvin F L, Zhang Y. Identification and minimization of deviations of real gear tooth surface[J]. ASME Journal Mechanical Design, 1991, 113(3): 55-62.
- [3] Litvin F L, Zhang Y, Handschuh R F. Computerized inspection of real surfaces and minimization of their devia-

- tions[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 1992, 32(1): 141-145.
- [4] Litvin F L, Kuan C, Wang J C, et al. Minimization of deviation of gear real tooth surface determined by coordinate measurements[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1993, 115(12): 995-1001.
- [5] Gosselin C, Nonaka T, Shiono Y. Identification of the machine setting of real hypoid gear tooth surface[J]. ASME Journal Mechanical Design, 1998, 120(3): 429-440.
- [6] Lin C Y, Tsay C B, Fong Z H. Computer-aided manufacturing of spiral bevel and hypoid gears with minimum surface-deviation [J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(6): 785-803.
- [7] 方宗德, 杨宏斌, 邓效忠. 弧齿锥齿轮齿面优化修正及计算机仿真[J]. 航空动力学报, 2002, 17(1): 140-144.  
FANG Zongde, YANG Hongbin, DENG Xiaozhong. Optimal tooth surface correction of spiral bevel gears and computerized simulation [J]. Journal of Aerospace Power, 2002, 17(1): 140-144. (in Chinese)
- [8] 王军, 王小椿, 姜虹. 螺旋锥齿轮齿面的三坐标测量[J]. 机械工程学报, 2003, 39(6): 151-154.  
WANG Jun, WANG Xiaochun, JIANG Hong, et al. Coordinate measurement of tooth surface of spiral bevel gear [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(6): 151-154. (in Chinese)
- [9] 王小椿, 王军, 姜虹. 螺旋锥齿轮的齿面测量及机床加工参数修正[J]. 机械工程学报, 2003, 39(8): 125-128.  
WANG Xiaochun, WANG Jun, JIANG Hong, et al. Tooth surface measurement and machine-settings correction of spiral bevel gears[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(8): 125-128. (in Chinese)
- [10] FAN Qi, Dafoe R, Swanger J W. Higher-order tooth flank form error correction for face-milled spiral bevel and hypoid gears[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2008, 130(7): 072601(7 pages).
- [11] Fan Q. Tooth surface error correction for face-hobbed hypoid gears[J]. ASME, Journal of Mechanical Design, 2010, 132(1): 011004(8 pages).
- [12] Shih Y P, Fong Z H. Flank correction for spiral bevel and hypoid gears on a six-axis CNC hypoid generator [J]. ASME, Journal of Mechanical Design, 2008, 130(6): 062604(11 pages).
- [13] 方宗德, 曹雪梅, 张金良. 航空弧齿锥齿轮齿面坐标测量的数据处理[J]. 航空学报, 2007, 28(2): 456-459.  
FANG Zongde, CAO Xuemei, ZHANG Jinliang. Measuring date processing of aviation spiral bevel gears by using coordinate measurement [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007, 28(2): 456-459. (in Chinese)
- [14] Litvin F L, Fuentes A. Gear geometry and applied theory [M]. New York: Cambridge University Press, 2004.
- [15] 方宗德. 修形斜齿轮的承载接触分析[J]. 航空动力学报, 1997, 12(3): 251-254.  
FANG Zongde. Loaded tooth contact analysis of modified helical gears [J]. Journal of Aerospace Power, 1997, 12(3): 251-254. (in Chinese)
- [16] 方宗德, 郭琳琳, 苏进展, 等. 基于齿面印痕控制的弧齿锥齿轮公差优化设计[J]. 农业机械学报, 2011, 42(7): 223-228.  
FANG Zongde, GUO Linlin, SU Jinzhan, et al. Optimal design of tolerance for spiral bevel gears by controlling contact path [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011, 42(7): 223-228. (in Chinese)